线代 1(H)2021 秋冬期中

扫描版，如有错通知 zjj 进行修改

2021 年 11 月 12 日

一、(10 分)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -a\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 9\\ -6\end{bmatrix},\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{ 无解, 求}a.$$

二、(10 分) 证明替换定理：设向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关, $\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$. 如果 $b_i\neq 0$, 那么用 β 替换 α_i 以后得到的向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s\}$ 也线性无关。

三、(10 分) 设 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基, $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中 $\alpha_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_5,\alpha_3=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$ 。

(1) 求 α_1,α_2 之间的夹角;

(2) 求 W 的一组单位正交基。

四、(10 分) 如果向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 的秩为 r, 那么该向量组中任意 s 个向量组成的子集的秩大于或等于 $r+s-m$.

五、(10 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中取三个向量:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,0,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,3),$$

设 σ 是满足 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 的线性变换，其中 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的自然基。

(1) 求 σ 关于自然基所对应的矩阵。

(2) 求向量 $\alpha_1=(-2,5,6)$ 在 σ 下的象。

六、(10 分) 已知 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性变换 $\sigma(p(x))=p(x+1)-p(x),p(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 。

(1) 求 σ 的秩和 $Ker\sigma$;

(2) 求所有可能的 $p(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$ 满足 $\sigma(p(x))=\lambda p(x)$.

七、(10 分) 设 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 4 维向量空间 V 的一组基，σ 关于基 B 所对应的矩阵为 A, 求 $Im\sigma$ 和 $Ker\sigma$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

八、(10 分) 域 F 上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{m\times n}(F)$ 是域 F 上的一个线性空间。令 $V_i=\{Ae_{ii}\mid A\in M_{m\times n}(F)\}$, 其中 e_{ij} 表示第 i 行, 第 j 列元素为 1 , 其余元素为 0 的 n 阶矩阵, $i=1,2,\cdots,n$ 。证明:

(1) V_i 是 $M_{m\times n}(F)$ 的子空间;

(2) $M_{m\times n}(F)=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$.

九、(20 分) 判断下列叙述是否正确, 若正确, 请给出详细严谨的证明：若错误，请具体说明理由或举出反例。

(1) 正实数集 $\mathbb{R}^+$ 对如下定义的加法和数量乘法构成整数 $\mathbb{Z}$ 上的线性空间:

$$a\oplus b=ab,\lambda\circ a=a^\lambda,\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\lambda\in\mathbb{Z}$$

(2) 设 σ 是 $V(F)$ 到自身的一个映射, $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基, 则 σ 可逆当且仅当 $\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}$ 是 $V(F)$ 的一组基。

(3) 对于任意实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 V, 都能找到有限个 V 的非平凡子空间 $V_1,\cdots,V_m$, 使得 $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m=V$ 。

(4) 与所有 n 阶矩阵可交换的矩阵一定是 n 阶数量矩阵。