线代 1(H)2020 秋冬期中

扫描自 zjj 发皱的试卷

2021 年 8 月 24 日

一、(10 分) 设方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间为 V_1, 方程组：

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + bx_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间为 V_2, 问 a, b 为何值时, $\mathrm{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ 。

二、(10 分） 证明:$V = \left\{ (a_{ij})_{n\times n} \mid \forall i, j, a_{ij} = a_{ji} \right\}$ 为 $F^{n\times n}$ 的子空间, 并求其基与维数。

三、(10 分) 设 $f_1 = -1 + x, f_2 = 1 - x^2, f_3 = 1 - x^3, g_1 = x - x^2, g_2 = x + x^3, V_1 = L(f_1, f_2, f_3), V_2 = L(g_1, g_2)$, 求 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的基与维数, 并求 V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 空间的补。

四、(10 分) 设 ϵ_1, ϵ_2 为 n 维欧氏空间 V 的两个单位正交向量, 定义

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \epsilon_1)\epsilon_1 - 2(\alpha, \epsilon_2)\epsilon_2$$

证明: σ 是 V 上的线性变换，并满足 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$ 对任何 α, β 都成立。

五、(10 分) 已知 n 阶矩阵 A 的秩为 1, 证明: $A^k = \mathrm{tr}(A)^{k-1}A$ 。

六、(10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a-3b & b-3c & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$. 求矩阵 X 满足:

$$X+\left(B\left(A^TB^2\right)^{-1}A^T\right)^{-1}=X\left(A^2\left(B^TA\right)^{-1}B^T\right)^{-1}(A+B)$$

七、(10 分) 设 $V($ F$)$ 是一个 n 维线性空间, $\sigma\in L(V,V)$, 证明:
(1) 在 $\mathbf{F}[x]$ 中有一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$;
(2) σ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 有一常数项不为零的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$ 。

八、(10 分) 已知三维线性空间 V 的线性变换 σ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 所对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 σ 在基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 下对应的矩胙 B, 其中:

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

(2) 求 σ 的值域 $\sigma(V)$ 和核 $\ker\sigma$;
(3) 把 $\sigma(V)$ 的基扩充为 V 的基, 并求 σ 在这个基下对应的矩阵;
(4) 把 $\ker\sigma$ 的基扩充为 V 的基, 并求 σ 在这个基下对应的矩阵。

九、(20 分) 判断下面命题的真伪。若它是真命题，给出一个简单的证明：若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定。
(1) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性相关。
(2) 一个有限维 $(\geqslant 2)$ 线性空间只含有有限个子空间。
(3) 已知 $\sigma\in L(V,V)$, 其中 $\dim V=n$, 则由秩 $(\sigma)+\dim(\ker\sigma)=n$, 可得 $\operatorname{Im}\sigma+\ker\sigma=V$.
(4) 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 可逆。
卷末注：第 1 题解得的 a,b 实际上不符合题意，即不存在 a,b。