数学分析（甲）I（H）2021 秋冬期末

大佐回忆卷

2022 年 1 月 5 日

一、(10 分) 叙述 Cauchy 收敛原理，并证明数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k(k+1)}$ 收敛.

二、(32 分) 计算

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (1+t^4)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}t}{x^3}$.

2. $\int \frac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+2}\mathrm{d}x$.

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$.

4. 求 $y = e^x$ 过点 $(0,0)$ 的切线 L，并求 $y = e^x$、L 和 y 轴所夹图形绕 x 轴旋转一周的体积.

三、(8 分) 证明：无上界数列必存在发散于无穷大的子列.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上定义，证明：

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) - \inf_{x\in[0,1]} f(x) = \sup_{x',x''\in[0,1]} |f(x') - f(x'')|.$$

五、(10 分)$f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导，证明：若 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，则 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

六、(10 分) 证明：若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 0$，则 $g(x)$ 一致连续.

七、(10 分)$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，证明 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，且其值相等.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 三阶可导，$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$，$f'''(0) > 0$，$x \in (0,1)$ 时 $f(x) \in (0,1)$，且数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = x_n(1 - f(x_n))$

1. 证明：$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$;

2. 证明：存在 $\alpha > 0$ 和常数 $c \neq 0$，使 $\lim_{n\to+\infty} cn^\alpha x_n = 1$.